به نام خدا

درس : ریاضی کاربردی

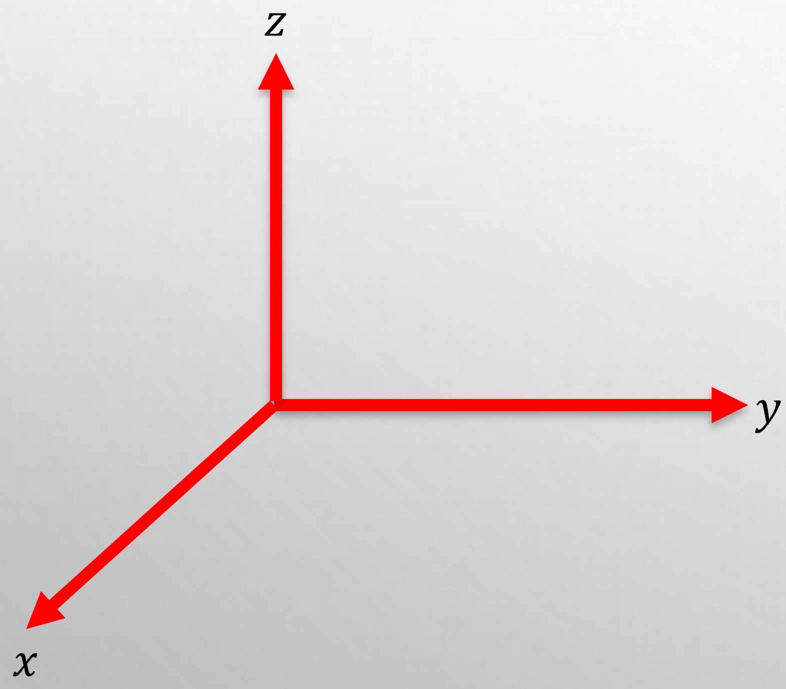
مدرس : حسین علی آبادی

فصل اول : بردارها

دستگاه مختصات سه بعدی:

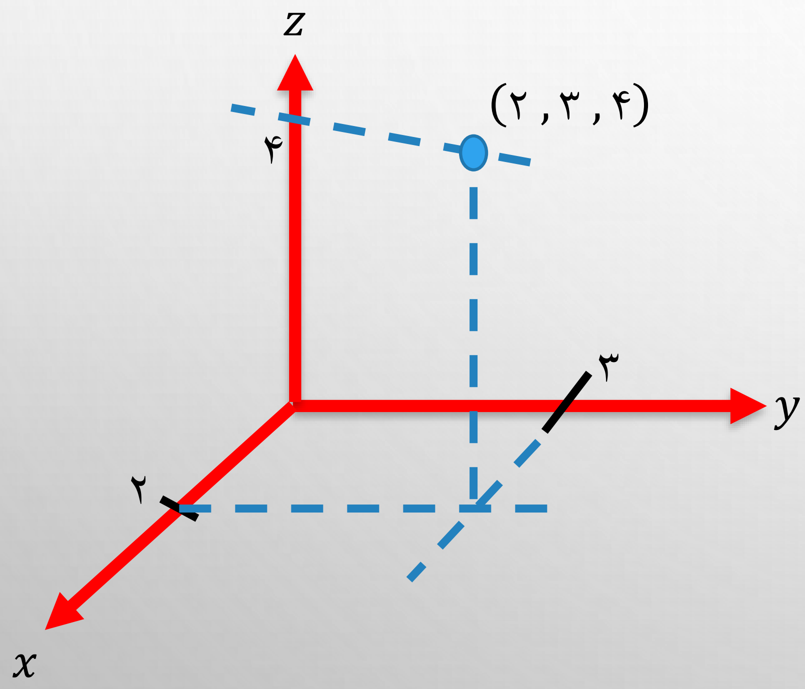
هر سه محور دو به دو عمود بر هم تشکیل دستگاه مختصات سه بعدی می دهند. این سه محور فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند.

دستگاه مقابل راستگرد است یعنی اگر شخصی در جهت محور z بایستد به طوری که به محور y نگاه کند دست راست او محور x را نشان می دهد.



هر نقطه در فضای سه بعدی به صورت (x_0, y_0, z_0) نشان داده می شود و بالعکس هر سه تایی مرتب از اعداد حقیقی نمایش دهنده یک نقطه در فضا می باشد.

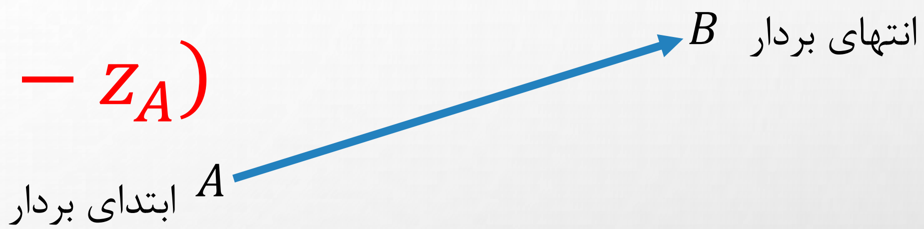
مثال) نقطه (۲, ۳, ۴) را در دستگاه مختصات نشان دهید.



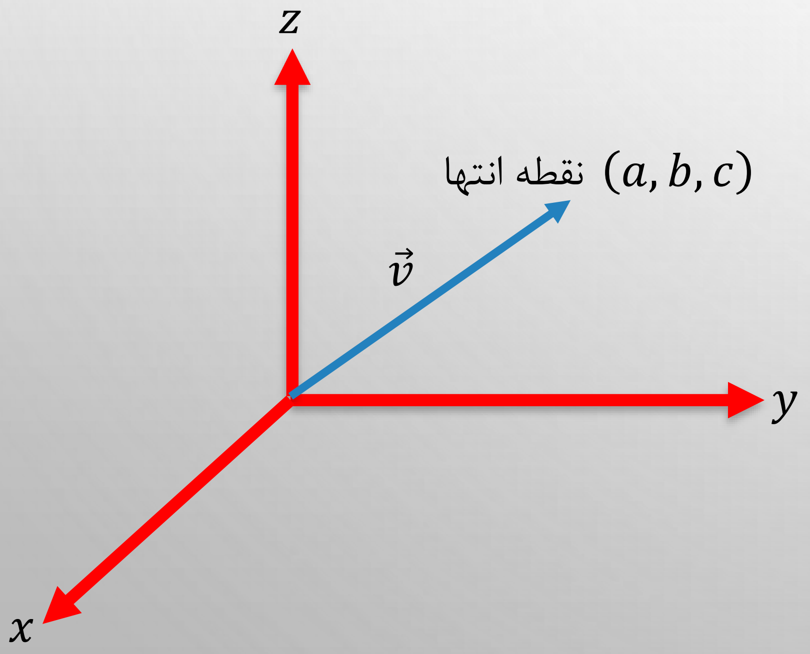
بردار : هر پاره خط جهت دار را یک بردار می نامیم.

اگر A و B دو نقطه در فضا باشند بردار $\overrightarrow{AB}$ را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A , z_B - z_A)$$



دو بردار را مساوی گوییم هرگاه هم اندازه و هم راستا و هم جهت باشند.
بردار مکان : برداری که ابتدای آن مبدا مختصات باشد.



$$\vec{v} = (a, b, c)$$

طول بردار: هرگاه A و B دو نقطه در فضا باشند طول بردار $\overrightarrow{AB}$ با طول پاره خط AB برابر است و داریم :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲ + (z_B - z_A)^۲}$$

برداری که ابتدای آن مبدا مختصات و انتهای آن نقطه (a, b, c) باشد را به صورت $\vec{v} = (a, b, c)$ نشان داده و طول آن را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

مثال) اگر $A(۱,۲,۴)$ و $B(-۱\,,۳\,,۲)$ دو نقطه باشند طول بردار $\overrightarrow{AB}$ را به دست آورید.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-۱ - ۱, ۳ - ۲, ۲ - ۴) = (-۲\,,۱\,,-۲)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (۱)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱ + ۴} = \sqrt{۹} = ۳$$

جمع و تفریق دو بردار : اگر $\vec{a} = (a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند داریم:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_۱ \pm b_۱, a_۲ \pm b_۲, a_۳ \pm b_۳)$$

ضرب عدد در بردار: اگر k یک عدد حقیقی و $\vec{v} = (a, b, c)$ یک بردار باشد برای ضرب عدد در بردار کافی است عدد حقیقی را در تمام مولفه های بردار ضرب کنیم :

$$k\vec{v} = (ka, kb, kc)$$

مثال) اگر $\vec{a} = (-۲,۳,۴)$ و $\vec{b} = (۵,۰,-۳)$ باشند حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\vec{a} + \vec{b} = (۳,۳,۱)$$

$$-۳\vec{b} = (-۱۵,۰,۹)$$

$$-۲\vec{a} + ۳\vec{b} = (۴,-۶,-۸) + (۱۵,۰,-۹) = (۱۹,-۶,-۱۷)$$

بردارهای پایه: در فضای سه بعدی سه بردار $\vec{i} = (۱,۰,۰)$ و $\vec{j} = (۰,۱,۰)$ و $\vec{k} = (۰,۰,۱)$ را بردار پایه می نامیم.

نتیجه: هر بردار را می توان براساس بردارهای پایه نوشت:

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

ضرب داخلی دو بردار:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و زاویه بین آنها θ باشد ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right| \cos\theta$$

قضیه : اگر $\vec{a} = (a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند داریم:

$$\vec{a}\,.\vec{b} = a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + a_۳ b_۳$$

محاسبه زاویه بین دو بردار:

اگر θ زاویه بین دو بردار غیرصفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ باشد به کمک ضرب داخلی دو بردار می توان فرمول زیر را برای محاسبه θ نوشت:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \Longrightarrow \theta = cos^{-۱}\left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

بنابر تعریف توابع معکوس مثلثاتی داریم: $۰ \leq \theta \leq \pi$

مثال) زاویه بین دو بردار $\vec{a} = ۲\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = ۲\vec{i} - ۳\vec{j} + ۲\vec{k}$ را به دست آورید.

$$\vec{a} . \vec{b} = (۰\,, ۲\,, ۱) . (۲\,, -۳\,, ۲) = ۰ - ۶ + ۲ = -۴$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{۰^۲ + ۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵} \qquad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۴ + ۹ + ۴} = \sqrt{۱۷}$$

$$\theta = cos^{-۱}\left(\frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|}\right) \Rightarrow \theta = cos^{-۱}\left(\frac{-۴}{\sqrt{۵}\sqrt{۱۷}}\right) = cos^{-۱}\left(\frac{-۴}{\sqrt{۸۵}}\right) = ۱۱۵/۷۱^{\circ}$$

ویژگی های ضرب داخلی:

۱) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$

۲) $\vec{a}\,.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

۳) $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^{۲}$

۴) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ۰$ $\longleftrightarrow$ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار عمودند

مثال) مقدار t را چنان بیابید که دو بردار زیر عمود برهم باشند.

$\vec{a} = (۲\,,t\,,۳) \quad \vec{b} = (-۴\,,۲\,,۱)$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = ۰ \Rightarrow -۸ + ۲t + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲t = ۵ \Rightarrow t = ۲/۵$

مثال) نشان دهید سه بردار زیر تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند.

$\vec{a} = (۳\,,-۲\,,۱) \qquad \vec{b} = (۱\,,-۳\,,۵) \qquad \vec{c} = (۲\,,۱,-۴)$

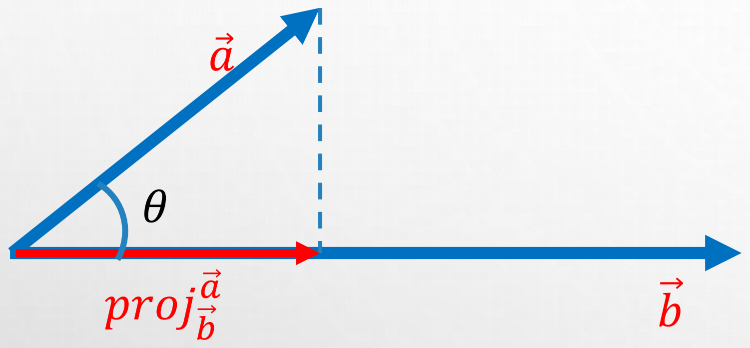
$\vec{a}\,.\,\vec{b} = ۳ + ۶ + ۵ = ۱۴$

$\vec{b}.\vec{c} = ۲ - ۳ - ۲۰ = -۲۱$

$\vec{a}\,.\,\vec{c} = ۶ - ۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow$ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بر هم عمودند.

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$:

با نماد $proj_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می شود :



$$proj_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\vec{b}\,.\,\vec{b}}\right)\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\right)\vec{b}$$

مثال) تصویر قائم بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ را بر بردار $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k}$ به دست آورید.

$$\vec{a} \,.\, \vec{b} = (۲\,,۳\,,-۱).(۱\,,۱,۲) = ۲ + ۳ - ۲ = ۳$$

$$\vec{b} \,.\, \vec{b} = ۱ + ۱ + ۴ = ۶$$

$$proj_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \left(\frac{\vec{a} \,.\, \vec{b}}{\vec{b} \,.\, \vec{b}}\right)\vec{b} = \frac{۳}{۶}(۱\,,۱,۲) = \left(\frac{۱}{۲}\,,\frac{۱}{۲},۱\right)$$

تمرین) اگر $|\vec{a}| = ۴$ و $\vec{b} = (-۱,۲,۳)$ و زاویه بین دو بردار ۶۰° باشد $proj_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ را به دست آورید.

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\cos ۶۰ = ۴ \times \sqrt{۱۴} \times \frac{۱}{۲} = ۲\sqrt{۱۴}$$

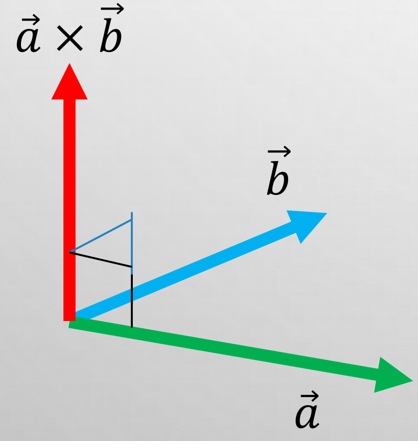
$$\vec{b}\,.\,\vec{b} = \left|\vec{b}\right|^{۲} = ۱۴$$

$$proj_{\vec{b}}^{\vec{a}} = \left(\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\vec{b}\,.\,\vec{b}}\right)\vec{b} = \frac{۲\sqrt{۱۴}}{۱۴}(-۱\ ,۲\ ,۳) = \left(-\frac{\sqrt{۱۴}}{۷},\frac{۲\sqrt{۱۴}}{۷},\frac{۳\sqrt{۱۴}}{۷}\right)$$

ضرب خارجی دو بردار:

فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\end{vmatrix}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)\vec{i}+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)\vec{j}+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)\vec{k}$$



مثال) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} = (۱ \ , -۲,۳)$ و $\overrightarrow{b} = (۰ \ , -۱,۲)$ را به دست آورید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \big(-۴ - (-۳)\big)\vec{i} + (۰ - ۲)\vec{j} + (-۱ - ۰)\vec{k} = -\vec{i} - ۲\vec{j} - \vec{k}$$

خواص ضرب خارجی دو بردار:

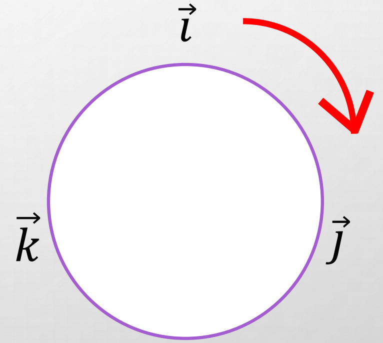
۱) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\theta$

۲) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

۳) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + (\vec{a} \times \vec{c})$

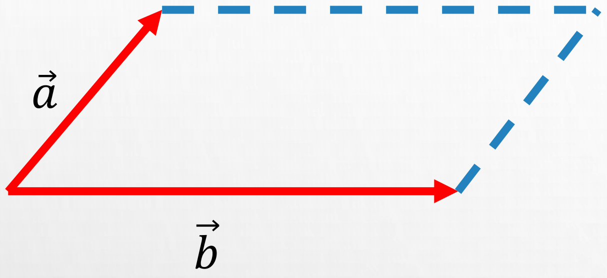
۴) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$ بردار صفر

۵) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ و $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ و $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$



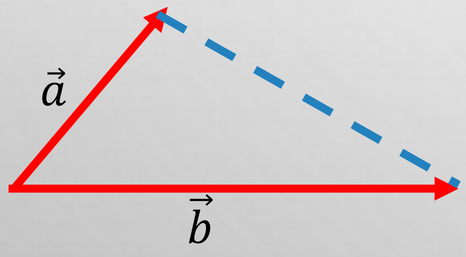
۶) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ ⟷ دو بردار موازی هم باشند.

مساحت متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود به صورت زیر محاسبه می شود :



$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود به صورت زیر محاسبه می شود :



$$S = \frac{۱}{۲}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

مثال) مساحت مثلث ABC به راس های $A(۱,۲,۰)$ و $B(۳,۰,-۳)$ و $C(۵,۲,۶)$ را به دست آورید.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۲\ ,-۲\ ,-۳) \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (۴\ ,۰\ ,۶)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & -۲ & -۳ \\ ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۲\vec{i} - ۲۴\vec{j} + ۸\vec{k}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۲)^{۲} + (-۲۴)^{۲} + (۸)^{۲}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۷۸۴} = ۱۴$$

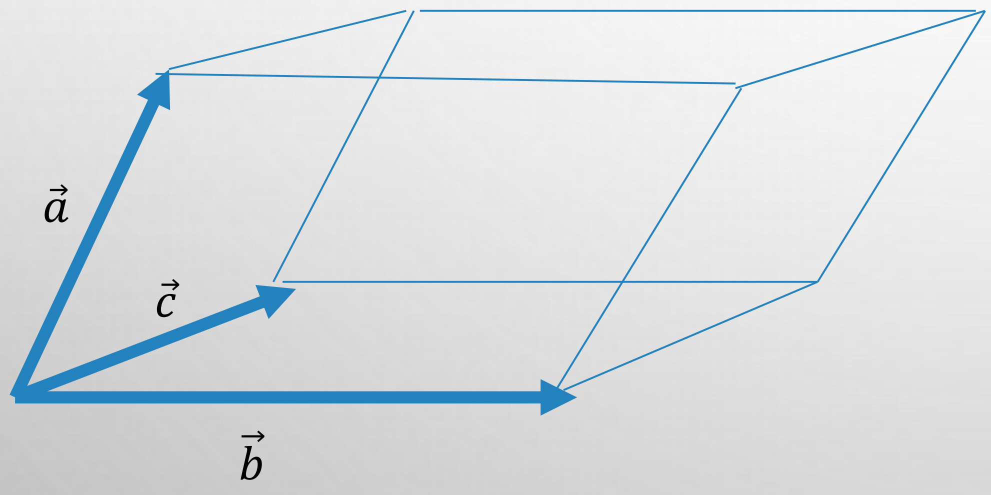
اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند حجم متوازی السطوحی که توسط این سه بردار ساخته می شود برابر است با :

$$V = \left|\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| = \left|\vec{b}\,.(\vec{a}\times\vec{c})\right| = \left|\vec{c}\,.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|$$

ضرب داخلی

ضرب خارجی

قدرمطلق



مثال) حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای زیر ساخته می شود را محاسبه کنید.

$$\vec{a} = \vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{b} = -۲\vec{i} + ۳\vec{k} \qquad \vec{c} = ۷\vec{j} - ۴\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۷ & -۴ \end{vmatrix} = -۲۱\vec{i} - ۸\vec{j} - ۱۴\vec{k}$$

$$\vec{a} \,.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (۱\,,۲\,,-۱).\,(-۲۱\,,-۸\,,-۱۴) = -۲۱ - ۱۶ + ۱۴ = -۲۳$$

$$V = |-۲۳| = ۲۳$$

معادله خط در فضا :

معادله خطی که از نقطه $P_0(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ گذشته و با بردار $\vec{v}=(a\ ,b\ ,c)$ (بردار هادی خط) موازی باشد به صورت زیر می باشد:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

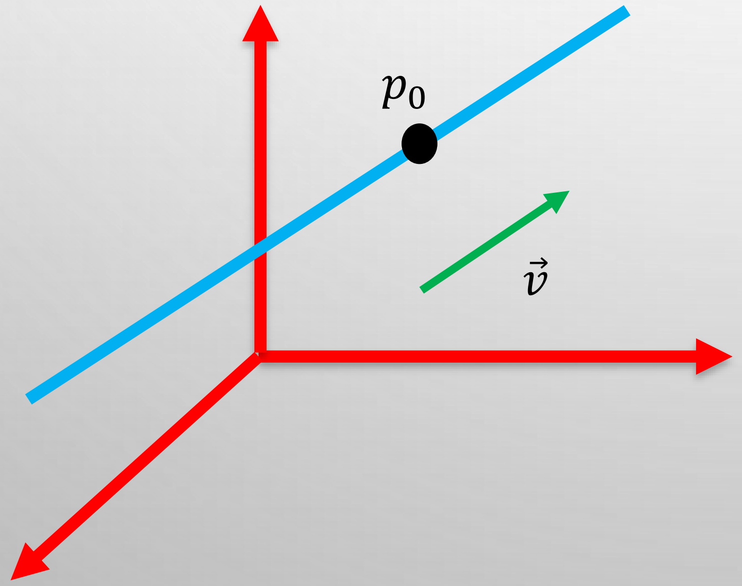
(معادله دکارتی)

یا

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \quad t\epsilon R$$

عدد حقیقی

(معادله پارامتری)



مثال) معادله خط را بنویسید که از دو نقطه $A(-۳ , ۲ , -۳)$ و $B(۱ , -۱ , ۴)$ می گذرد.

بردار هادی خط (موازی با خط) $\overrightarrow{AB} = B - A = (۴ , -۳ , ۷) = (a , b , c)$

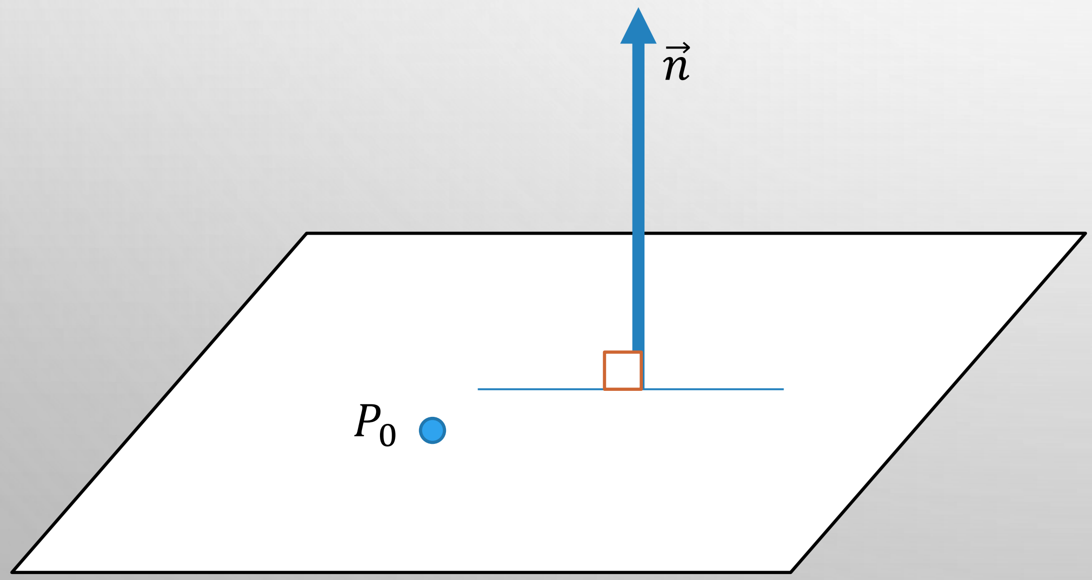
یکی از نقاط را دلخواه انتخاب می کنیم $(x_0 , y_0 , z_0) = (-۳ , ۲ , -۳)$

$$\frac{x-(-۳)}{۴} = \frac{y-۲}{-۳} = \frac{z-(-۳)}{۷} \Rightarrow \frac{x+۳}{۴} = \frac{y-۲}{-۳} = \frac{z+۳}{۷}$$

معادله صفحه در فضا :

معادله صفحه ای که از نقطه $P_0(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ گذشته و بردار غیرصفر $\vec{n} = (a\ ,b\ ,c)$ (بردار نرمال صفحه) بر آن عمود باشد به صورت زیر می باشد:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



مثال) معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $(-۲,۱,۳)$ گذشته و بردار $\vec{n} = (۲,۵,-۱)$ بر آن عمود باشد.

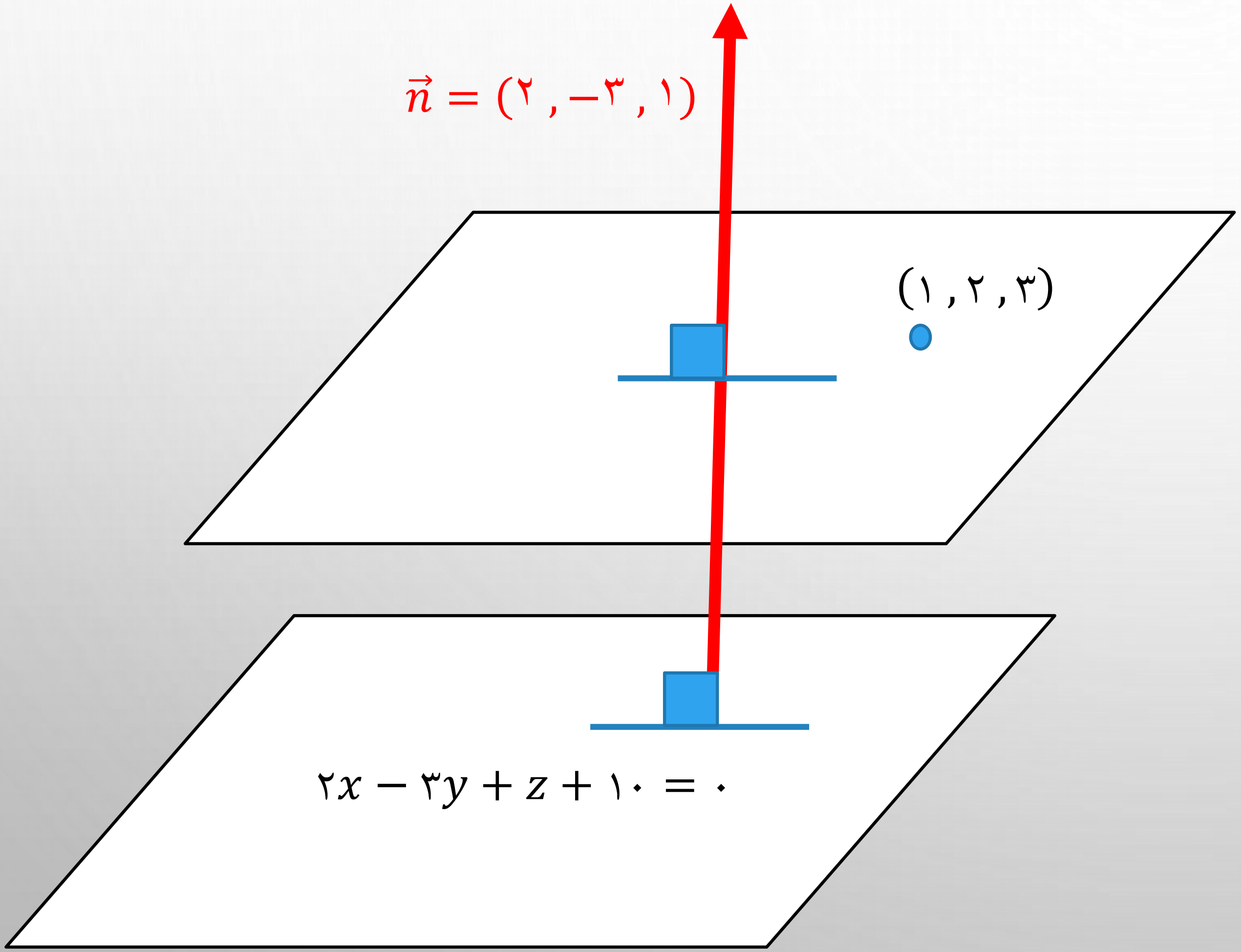
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$۲(x+۲)+۵(y-۱)-۱(z-۳)=۰$$

$$۲x+۵y-z+۲=۰$$

مثال) معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $(۱,۲,۳)$ گذشته و با صفحه $۲x - ۳y + z + ۱۰ = ۰$ موازی باشد.

اگر دو صفحه موازی باشند بردار نرمال یکسان دارند.
در معادله یک صفحه ضریب متغیرها به ترتیب مولفه های بردار نرمال هستند



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$۲(x - ۱) - ۳(y - ۲) + ۱(z - ۳) = ۰$$

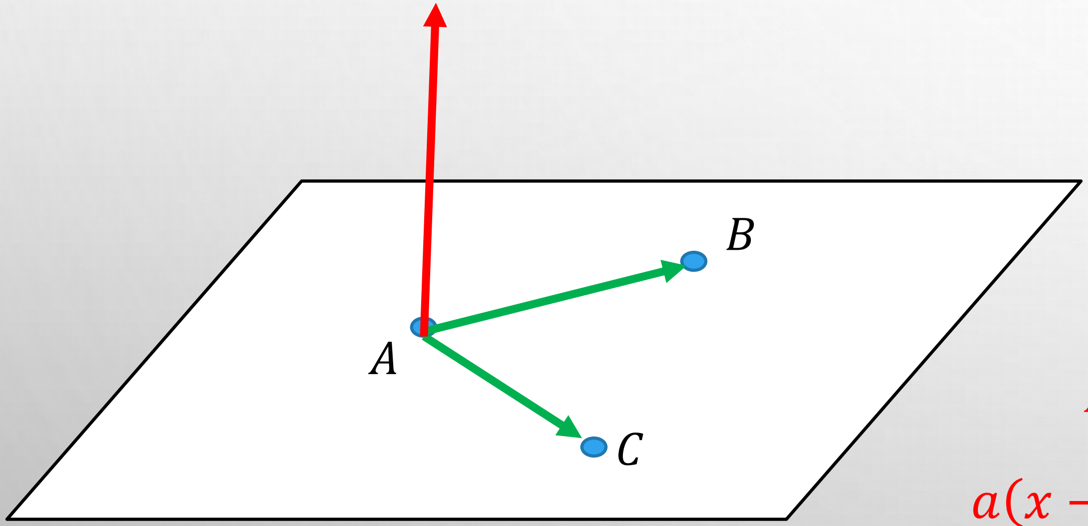
$$۲x - ۳y + z + ۱ = ۰$$

مثال) معادله صفحه ای را بنویسید که شامل نقاط زیر باشد.(سه نقطه روی یک خط نیستند)

$A(۰\,,۰\,,۱)$ $\qquad$ $B(۲\,,۰\,,۰)$ $\qquad$ $C(۰\,,۳\,,۰)$

برای نوشتن معادله یک صفحه نیاز به یک نقطه از صفحه و یک بردار عمود بر صفحه داریم. اگر دو بردار در صفحه را ضرب خارجی کنیم بردار به دست آمده بر صفحه عمود می شود.

بردار نرمال $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۲\,,۰,-۱) \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (۰\,,۳\,,-۱)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۳ & -۱ \end{vmatrix} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} + ۶\vec{k} = (۳\,,۲\,,۶) = (a, b, c)$$

$A(۰\,,۰\,,۱) = (x_0\,, y_0\,, z_0)$ نقطه دلخواه

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$۳(x - ۰) + ۲(y - ۰) + ۶(z - ۱) = ۰ \Rightarrow ۳x + ۲y + ۶z - ۶ = ۰$$